

基于自校正 Broyden 拟牛顿法的 航空发动机模型数值计算

王 元, 李秋红, 黄向华
(南京航空航天大学 能源与动力学院
江苏省航空动力系统重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 以 Broyden 拟牛顿法为基础结合计算发散判断和校正机制, 提出自校正 Broyden 拟牛顿法. 该算法结合牛顿法(Newton-Raphson method)平方收敛和 Broyden 拟牛顿法超线性收敛特性, 通过自适应调整计算步长和校正函数, 在非线性和变循环发动机部件级模型中具有更好的计算性能. 以变循环发动机部件级模型为对象, 应用自校正 Broyden 拟牛顿法进行稳态及动态仿真计算, 并与牛顿法和 Broyden 拟牛顿法作对比. 结果表明: 自校正 Broyden 拟牛顿法对恶劣的初始计算条件适应性更高, 计算速度更快且收敛能力性更强, 动态计算中部件模型计算调用次数为牛顿法的 15%, 模型动态误差低于 Broyden 拟牛顿法的 15%, 同时也低于牛顿法的 28%, 动态计算最大残差量低于其他两种算法的 25%. 验证结果表明了自校正 Broyden 拟牛顿法的优越性.

关 键 词: 自校正; Broyden 拟牛顿法; 牛顿法; 变循环发动机; 部件级模型

中图分类号: V231 **文献标志码:** A

Numerical calculation of aero-engine model based on self-tuning Broyden quasi-Newton method

WANG Yuan, LI Qiu-hong, HUANG Xiang-hua
(Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System,
College of Energy and Power Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A self-tuning Broyden quasi-Newton method combined with computing divergence mechanism judging and tuning was proposed. By combining the quadratic convergence of Newton-Raphson method and the super-linear convergence of Broyden quasi-Newton method, the proposed method had higher computing performance in calculation of nonlinear system. Targeting variable cycle engine component-level model, the steady state and dynamic simulation have been calculated by Newton-Raphson method, Broyden quasi-Newton method and the self-tuning Broyden quasi-Newton method. Results shows that, the self-tuning Broyden quasi-Newton method has greater adaptability, faster calculation speed and stronger convergence. The component computing times of the self-tuning Broyden quasi-Newton method is 15% of the Newton-Raphson method in dynamic simulation, the dynamic error is lower than 15% of the Broyden quasi-Newton method and 28% of the Newton-Raphson method, the maximum amount of residual is lower than 25% of other methods. These results prove the self-tuning Broyden quasi-Newton method superiority, the objective of the proposed method has been achieved.

Key words: self-tuning; Broyden quasi-Newton method; Newton-Raphson method; variable cycle engine; component-level model

航空发动机部件级模型数值计算的核心是求解部件共同工作方程组^[1-3],当共同工作方程组残差小于收敛误差时,认为当前模型计算出的气动热力学参数能够代表发动机当前真实工况,由于部件共同工作方程组是非线性方程组,这就对求解非线性方程组的方法的收敛性和实时性提出了较高的要求.目前常用的求解方法有:牛顿法和Broyden拟牛顿法等^[4].牛顿法程序简单但对计算初始条件要求苛刻,同时由于需要重复计算雅可比(Jacobi)矩阵,部件计算调用次数过多而严重影响了航空发动机部件级模型的计算实时性;Broyden拟牛顿法由于采用递推方式更新校正函数,避免了部件计算的重复调用,实时性要优于牛顿法,但对计算初始条件要求也较为苛刻,同时其收敛稳定性要低于牛顿法.目前在航空发动机数值计算应用中针对牛顿法和Broyden拟牛顿法的不足采取的改进方案主要有:初值拟合、部件特性扩展、变步长等^[5-15],主要思路为通过改善计算初始条件来改善部件计算的收敛性和收敛速度,但并不能改善算法本身在恶劣条件下的计算性能,同时这些改进方案牺牲了计算的实时性,在模型动态计算中的使用受到限制.

本文针对Broyden拟牛顿法在航空发动机模型数值计算中频繁出现的计算不稳定现象,提出一种Broyden拟牛顿法计算发散判断和自校正机制,构造自校正Broyden拟牛顿法,提高计算整体实时性和收敛能力.以部件结构较为复杂、共同工作方程较多的F120变循环发动机部件级模型^[16-17]为对象进行稳态及动态计算,并与牛顿法和Broyden拟牛顿法计算结果进行比较,以验证自校正Broyden拟牛顿法的有效性.

1 自校正Broyden拟牛顿法

对于非线性系统 $F(X)=0$ 的求解,Broyden拟牛顿法计算表达式如下:

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i - \lambda B_i^{-1} F(X_i) \\ B_{i+1} = B_i + (Y_i - B_i Q_i) \frac{Q_i^T}{Q_i^T Q_i} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $Q_i = X_{i+1} - X_i$, $Y_i = F(X_{i+1}) - F(X_i)$, B_i 为校正函数, λ 为计算步长,通常取为1.

在文献[4-9]中可以看到,Broyden拟牛顿法在发动机模型数值计算中应用时, B_0 通常取为初

始状态的雅可比矩阵,而计算步长 λ 被认为是调整计算性能的唯一参数,其调整手段与牛顿迭代法步长调整经验相似,或通过回朔或通过加减速.但本文通过大量实验验证发现,单纯修正计算步长仅能在较小范围内改善计算收敛效果,对于更为恶劣的初始条件下的Broyden拟牛顿法收敛特性的改善效果欠佳.

本文通过对牛顿法和Broyden拟牛顿法的特性分析和大量仿真实验,发现牛顿迭代法的平方收敛特性对超线性收敛的Broyden拟牛顿法的计算性能有修正效果,具体表现为当Broyden拟牛顿法计算濒临发散时使用雅可比矩阵值 J_i 代替校正函数 B_i 可以使Broyden拟牛顿法在当前步避免发散,这种修正效果可以被理解为杂交优势.经过大量实验验证,本文最终以非线性系统输出的二范数值 $\|F(X_i)\|$ 的变化趋势判断计算收敛或发散趋势,并在计算濒临发散时以雅可比矩阵 J_i 修正校正函数 B_i 并适当调整计算步长 λ_i .

基于以上分析验证,本文以文献[18]中的Broyden拟牛顿法为基础提出自校正Broyden拟牛顿法计算表达式如下:

对于非线性系统 $F(X)=0$ 的求解,给定初值 X_0, Q_{-1}, B_0, τ 和 a ,其中 X_0 为系统初猜值, $Q_{-1}=0, B_0$ 为初始时刻的雅可比矩阵 J_0 ,校正函数中的 τ 为校正因子,步长计算中的常数 a 为发散判断系数.

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i - \lambda_i B_i^{-1} F(X_i) \\ \bar{Q}_i &= \begin{cases} Q_i & \tau \left\| Q_i - \frac{Q_{i-1} Q_{i-1}^T}{Q_{i-1}^T Q_{i-1}} Q_i \right\| \leq \|Q_i\| \\ Q_i - \frac{Q_{i-1} Q_{i-1}^T}{Q_{i-1}^T Q_{i-1}} Q_i & \text{else} \end{cases} \\ B_{i+1} &= \begin{cases} B_i + (Y_i - B_i \bar{Q}_i) \frac{\bar{Q}_i^T}{\bar{Q}_i^T \bar{Q}_i} \|F(X_{i+1})\| \\ J_{i+1} & \text{else} \end{cases} \\ \lambda_{i+1} &= \begin{cases} 1.5\lambda_i & \|F(X_{i+1})\| \leq a \|F(X_i)\| \\ \lambda_i/3 & \|F(X_{i+1})\| > a \|F(X_i)\| \\ 1 & \lambda_i > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

2 变循环发动机模型数值计算

为了验证算法的实用性,将自校正Broyden拟牛顿法应用于结构复杂、共同工作方程较多的

变循环发动机数值计算中,数值计算分为稳态计算和动态计算两部分,根据计算要求的不同,两者的计算流程也有所不同,其中稳态计算采用迭代算法而动态计算采用有限次通过算法。

2.1 稳态计算

变循环发动机稳态计算共同工作方程有 8 个,具体如下:

$$\begin{cases} (H_{fan} + H_{cdfs})/H_{lturb} - 1 = \varepsilon_1 \\ H_{com}/H_{hturb} - 1 = \varepsilon_2 \\ (p_{sfh} - p_{sft})/p_{s22t} = \varepsilon_3 \\ (Q_{fan} - Q_{msv} - Q_{cdfs})/Q_{cdfs} = \varepsilon_4 \\ Q_{41r}/W_{41r} - 1 = \varepsilon_5 \\ Q_{45r}/W_{45r} - 1 = \varepsilon_6 \\ p_{s6}/p_{s16} - 1 = \varepsilon_7 \\ p_8/p_{8c} - 1 = \varepsilon_8 \end{cases} \quad (3)$$

其中 H_{fan} 为风扇需求功率, H_{cdfs} 为核心驱动风扇级需求功率, H_{lturb} 为低压涡轮提供功率, H_{com} 为压气机需求功率, H_{hturb} 为高压涡轮提供功率, p_{sfh} 和 p_{sft} 为风扇叶根叶尖出口静压, Q_{fan} 为风扇出口气流流量, Q_{msv} 为模式选择通道进口气流流量, Q_{cdfs} 为核心驱动风扇级进口气流流量, Q_{41r} 为高压涡轮进口换算流量, W_{41r} 为高压涡轮初猜换算流量, Q_{45r} 为低压涡轮进口换算流量, W_{45r} 为低压涡轮初猜换算流量, p_{s6} 为低压涡轮出口静压, p_{s16} 为外涵出口静压, p_8 为加力燃烧室出口总压, p_{8c} 为喷口背压。

8 个平衡方程初猜值分别为:高压转子转速 N_{pc} 、低压转子转速 N_{pf} 、风扇叶尖叶根流量比 X_{fan} 、风扇压比系数 Z_f 、核心驱动风扇级压比系数 Z_d 、压气机压比系数 Z_c 、低压涡轮换算流量 W_{41r} 及高压涡轮换算流量 W_{45r} 。

自校正 Broyden 拟牛顿法在稳态计算中的计算流程如图 1 所示。

此处发散判断系数 a 选为 2 是由于大量仿真研究发现当 $\|F(X_{i+1})\| > 2\|F(X_i)\|$ 时,计算已经趋于发散,需要计算当前工况下的雅可比矩阵值 J_i 赋给校正函数 B_i ,并减小计算步长 λ 以修正计算趋势,相当于对算法进行重新初始化。 a 的取值不宜过大,否则会错过计算临近发散时刻而导致计算发散;取值也不宜过小,因为实际验证发现残差二范数值小范围波动时算法还是能够收敛的,此时没有校正的必要,反而会增加计算量。随着计算的进行,一定范围内适当增大计算步长 λ 可以加快收敛速度,但若 λ 过大却会减慢收敛速度甚

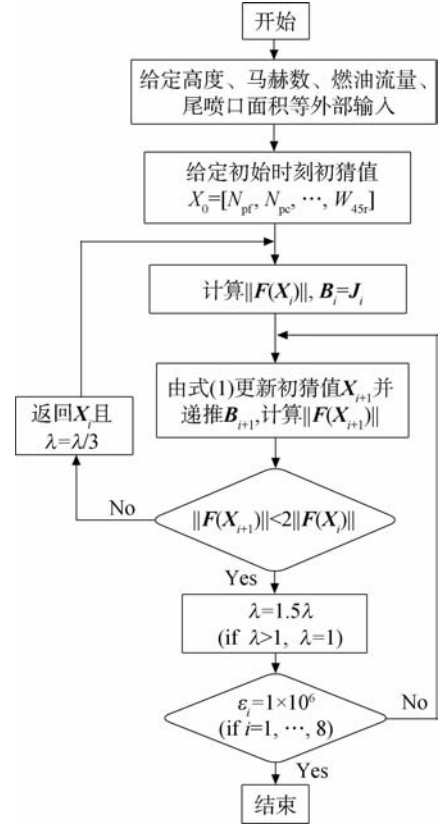


图 1 航空发动机稳态模型计算流程图

Fig. 1 Flowchart of steady state model calculation for aero-engine

至出现计算发散情况。

2.2 动态计算

动态计算共同工作方程有 6 个,如下:

$$\begin{cases} (p_{sfh} - p_{sft})/p_{s22t} = \varepsilon_1 \\ (Q_{fan} - Q_{msv} - Q_{cdfs})/Q_{cdfs} = \varepsilon_2 \\ Q_{41r}/W_{41r} - 1 = \varepsilon_3 \\ Q_{45r}/W_{45r} - 1 = \varepsilon_4 \\ p_{s6}/p_{s16} - 1 = \varepsilon_5 \\ p_8/p_{8c} - 1 = \varepsilon_6 \end{cases} \quad (4)$$

其中 J_1 和 J_2 分别为低压转子和高压转子转动惯量。6 个平衡方程初猜值分别为:风扇压比系数 Z_f 、风扇叶尖叶根流量比 X_{fan} 、核心驱动风扇级压比系数 Z_d 、压气机压比系数 Z_c 、低压涡轮换算流量 W_{41r} 及高压涡轮换算流量 W_{45r} 。高压转子转速 N_{pc} 和低压转子转速 N_{pf} 由两个转子动力学方程计算得到

$$\begin{cases} \frac{dN_{pf}}{dt} = (H_{lturb} - H_{fan} - H_{cdfs}) / \left[N_{pf} \cdot J_1 \cdot \left(\frac{\pi}{30} \right)^2 \right] \\ \frac{dN_{pc}}{dt} = (H_{hturb} - H_{com}) / \left[N_{pc} \cdot J_2 \cdot \left(\frac{\pi}{30} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (5)$$

出于对实时性的考虑,动态计算通常采用一次通过或有限次通过方案,而本文中自校正 Broyden 拟牛顿法在动态计算中采用有限次通过方案,在迭代达到最大次数或预先设定的收敛条件时,进行下一步的动态计算,其他各项参数的选定与稳态计算一致,计算流程如图 2 所示。

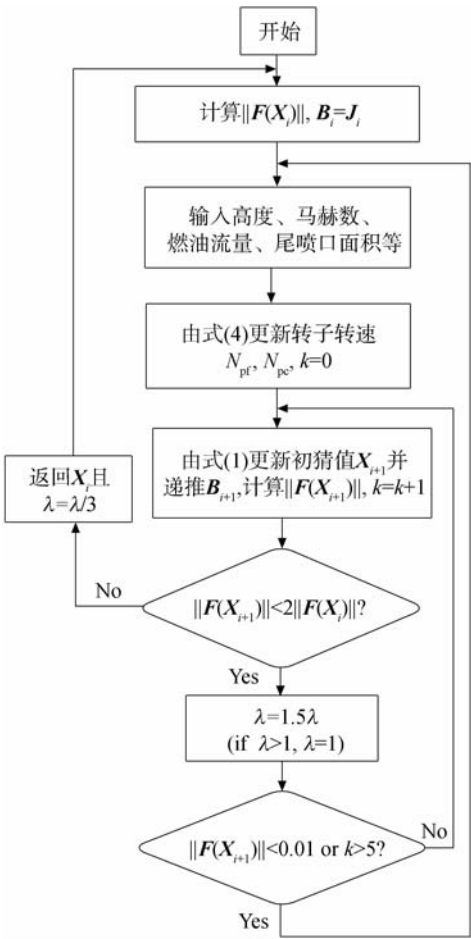


图 2 航空发动机动态模型计算流程图
Fig. 2 Flowchart of dynamic state model calculation for aero-engine

3 数值仿真

以 F120 变循环发动机部件级模型为对象,选取适当的参数 τ 的值,在不同工况下应用自校正 Broyden 拟牛顿法,总结初始步长 λ 的取值规律,并将计算结果与牛顿法及原 Broyden 拟牛顿法进行比较,验证自校正 Broyden 拟牛顿法的可行性。

3.1 参数 τ 选取

为选取式(2)中合适的校正因子 τ 值,按图 1 所示计算流程图进行计算,分别设置不同参数 τ ,部分计算结果如表 1 所示,当 $\tau=0$ 时递推公式与原 Broyden 拟牛顿法相同。

表 1 参数 τ 的设置及计算结果				
Table 1 Parameter τ setting and calculation results				
参数 τ	步长 λ	$\ F(X_0)\ $	计算结果	部件计算次数
0	0.25	0.1548	收敛	177
1	0.25	0.1548	收敛	177
2	0.25	0.1548	收敛	145
3	0.25	0.1548	收敛	162
5	0.25	0.1548	收敛	142
7	0.25	0.1548	收敛	144
10	0.25	0.1548	收敛	165
10×10^6	0.25	0.1548	收敛	159

由表 1 中可以看出,当 $\tau=5$ 时,部件计算次数相对较少,而在其他初始步长 λ 和 $\|F(X_0)\|$ 时也有类似的情况,因此本文参数 τ 统一取值为 5。

3.2 稳态仿真

为验证自校正 Broyden 拟牛顿法在稳态计算中的可行性,分别在相同初猜值条件下给定不同外部输入如高度 H 、马赫数 Ma 、燃油流量 W_{in} 和尾喷口面积 A_8 等或在相同外部输入条件下给定不同的初猜值,其目的均为设置不同的初始计算条件,具体表现为初始残差二范数值 $\|F(X_0)\|$ 的改变,此时分别使用牛顿法、Broyden 拟牛顿法和自校正 Broyden 拟牛顿法进行共同工作方程计算,部分计算结果如表 2 所示,其中收敛条件均为 $\epsilon_i < 1 \times 10^{-6}$, $i=1,2,\dots,8$ 。

由表 2 可以看出,当初始残差较小即初始计算条件较好时,牛顿法与 Broyden 拟牛顿法计算均收敛,收敛速度随着步长 λ 增大而加快;随着初始残差增大即初始计算条件逐渐恶劣,牛顿法必须减小计算步长 λ 才能确保计算收敛,而 Broyden 拟牛顿法即使通过减小步长 λ 也不一定能确保计算收敛;当初始残差超过一定范围时即初始计算条件恶劣到一定程度后,牛顿法与 Broyden 拟牛顿法无论怎样调整步长 λ 都无法收敛。相比之下,自校正 Broyden 拟牛顿法计算收敛速度大于牛顿迭代法而与 Broyden 拟牛顿法大致相同,但其计算稳定性要高于牛顿迭代法与 Broyden 拟牛顿法,具体表现为其对不同计算步长和恶劣初始计算条件的适应性:在牛顿迭代法与 Broyden 拟牛顿法表现出计算不稳定或不适用的工况范围内自校正 Broyden 拟牛顿法始终能够保证计算的收敛性和较高的收敛速度,体现了算法的优越性。

表 2 3 种方法的计算结果

Table 2 Calculation results of three methods

$\ F(\mathbf{X}_0)\ $	初始 计算步长	牛 顿 法		Broyden 拟牛顿法		自校正 Broyden 拟牛顿法	
		结果	计算次数	结果	计算次数	结果	计算次数
0.0289	0.10	收敛	1615	收敛	100	收敛	51
0.0289	0.20	收敛	799	收敛	53	收敛	48
0.0289	0.25	收敛	612	收敛	43	收敛	30
0.0289	0.50	收敛	272	收敛	21	收敛	47
0.0289	0.80	收敛	136	收敛	17	收敛	29
0.0289	1.00	收敛	68	收敛	14	收敛	30
0.0475	0.10	收敛	1923	收敛	112	收敛	36
0.0475	0.20	收敛	954	发散		收敛	48
0.0475	0.25	收敛	699	收敛	55	收敛	57
0.0475	0.50	发散		收敛	28	收敛	50
0.0475	0.80	发散		发散		收敛	74
0.0475	1.00	发散		发散		收敛	112
0.0602	0.10	收敛	2008	发散		收敛	53
0.0602	0.20	收敛	988	收敛	75	收敛	50
0.0602	0.25	收敛	784	发散		收敛	49
0.0602	0.50	发散		收敛	45	收敛	67
0.0602	0.80	发散		发散		收敛	116
0.0602	1.00	发散		发散		收敛	115
0.1946	0.10	发散		发散		收敛	369
0.1946	0.20	发散		发散		收敛	227
0.1946	0.25	发散		发散		收敛	186
0.1946	0.50	发散		发散		收敛	182
0.1946	0.80	发散		发散		收敛	413
0.1946	1.00	发散		发散		收敛	204

3.3 动态仿真

动态过程中对实时性要求较高,本文应用自校正 Broyden 拟牛顿法采用有限次通过方案,按图 2 所示流程图进行动态计算,并与牛顿一次通过法、Broyden 一次通过法和动态迭代计算比较,以验证自校正 Broyden 拟牛顿法在动态计算中的可行性,其中动态迭代计算要求每步仿真步长内迭代计算到计算收敛为止。

以变循环发动机模型由地面状态高度为 0 km,马赫数为 0,至高度为 3 km,马赫数为 1.0 处的动态过程为例,图 3~图 5 为使用自校正 Broyden 拟牛顿法、牛顿一次通过法和 Broyden 一次

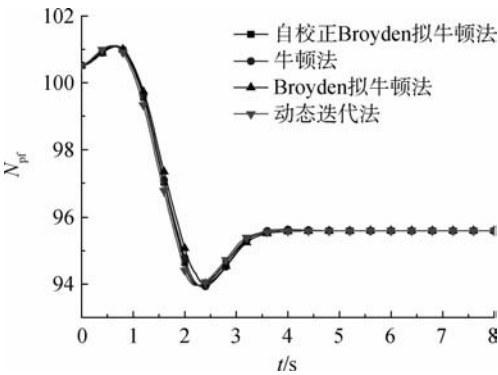


图 3 N_{pt} 变化曲线对比

Fig. 3 Comparison of variation curves of N_{pt}

通过法进行动态计算时 N_{pt} , N_{pc} 和推力 F 的变化曲线,横坐标 t 表示时间,图 6 为以动态迭代法计算结果为基准值的动态推力误差曲线(e_F 表示动态推力误差),图 7 为动态过程中方程残差二范数值 $\|F(X_i)\|$ 的变化曲线;表 3 为模型动态计算最终收敛的时间及期间部件计算调用次数对比(模型仿真步长为 0.02 s).

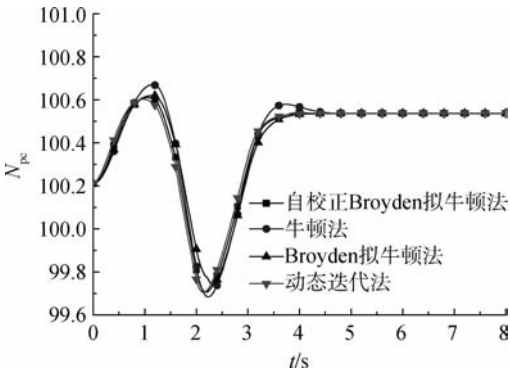


图 4 N_{pc} 变化曲线对比(H 和 Ma 变化)
Fig. 4 Comparison of variation curves of N_{pc}
(by changing H and Ma)

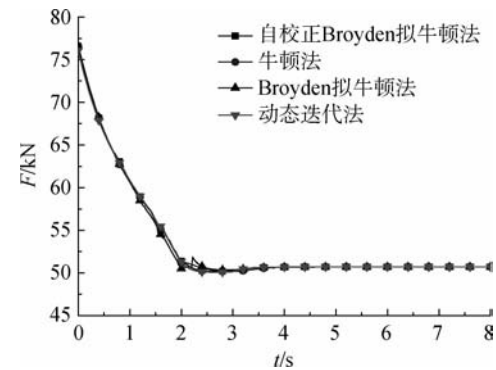


图 5 推力变化曲线对比(H 和 Ma 变化)
Fig. 5 Comparison of variation curves of thrust
(by changing H and Ma)

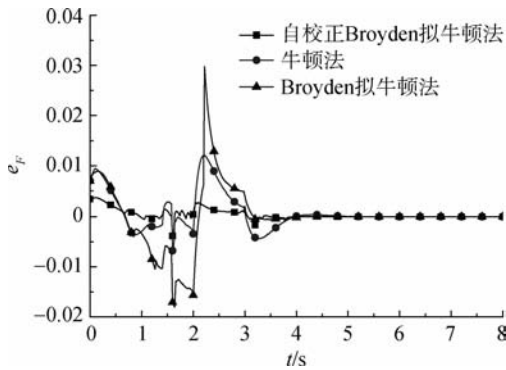


图 6 动态推力误差曲线对比(H 和 Ma 变化)
Fig. 6 Comparison of dynamic thrust error curves
(by changing H and Ma)

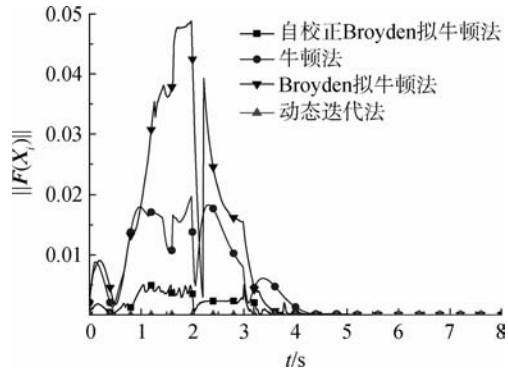


图 7 动态残差曲线对比(H 和 Ma 变化)
Fig. 7 Comparison of dynamic residuals curves
(by changing H and Ma)

表 3 动态计算性能对比(H 和 Ma 变化)
Table 3 Comparison of dynamic calculated performance
(by changing H and Ma)

计算方法	部件计算 调用次数	动态收敛 时间/s
牛顿时法一次通过法	3 471	5.34
Broyden 一次通过法	455	4.44
自校正 Broyden 拟牛顿时法	512	4.20
动态迭代计算		3.78

由图 3~图 7 及表 3 可以看出:Broyden 一次通过法动态精度最差,最大动态误差高达 3%;牛顿时法一次通过法最大动态误差为 1.4%,但由于需要重复计算雅可比矩阵以及计算步长阶段性不匹配导致收敛速度慢,因此部件调用次数最多且最终收敛的时间与动态迭代算法相差最大;而自校正 Broyden 拟牛顿时法凭借良好的快速收敛能力,其最大动态误差仅为 0.4%,动态计算最终收敛的时间最接近动态迭代算法,部件计算调用次数与 Broyden 一次通过法大致相同而远低于牛顿时法一次通过法,表现出了优越的动态计算实时性和计算精度,证明了其在动态计算中的可行性。

图 8~图 9 及表 4 为发动机模型在地面状态油门杆角度(PLA)由 30°推至 70°时的动态性能对比:Broyden 一次通过法最大动态误差为 2.6%,动态精度最差;牛顿时法一次通过法最大动态误差为 1.8%,但最终收敛的时间与动态迭代算法相差最大,部件调用次数最多;而自校正 Broyden 拟牛顿时法最大动态误差仅为 0.4%,动态计算最终收敛的时间最接近动态迭代算法,部件计算调用次数与 Broyden 一次通过法大致相同而远低于牛顿时法一次通过法,由此可以得到与上例相同的结论。

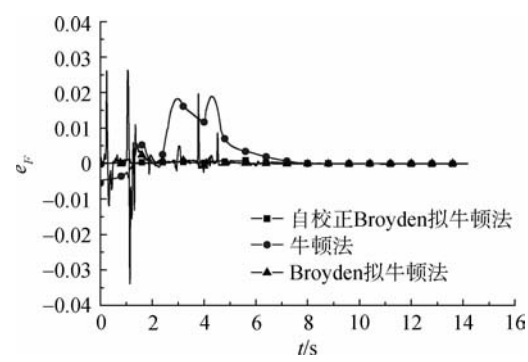


图 8 动态推力误差曲线对比(PLA 变化)

Fig. 8 Comparison of dynamic thrust error curves
(by changing PLA)

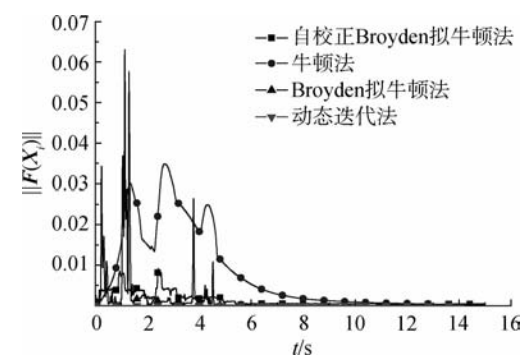


图 9 动态残差曲线对比(PLA 变化)

Fig. 9 Comparison of dynamic residuals curves
(by changing PLA)

表 4 动态计算性能对比(PLA 变化)

Table 4 Comparison of dynamic computing performance
(by changing PLA)

计算方法	部件计算 调用次数	动态收敛 时间/s
牛顿一次通过法	4 693	7. 22
Broyden 一次通过法	645	6. 34
自校正 Broyden 拟牛顿法	732	5. 94
动态迭代计算	5. 32	

4 结 论

本文以 Broyden 拟牛顿法为基础结合新校正函数,提出计算发散判断和校正机制,构造了自校正 Broyden 拟牛顿法. 算法吸取 Broyden 拟牛顿法无需重复计算雅可比矩阵的计算速度优势,同时将牛顿法平方收敛特性及 Broyden 拟牛顿法超线性收敛特性有机结合,发挥两者杂交优势,使自校正 Broyden 拟牛顿法在非线性系统中具有了超

越以上两种算法的高收敛性能. 以变循环发动机部件级模型为对象,应用自校正 Broyden 拟牛顿法进行稳态及动态仿真计算,并与牛顿法和 Broyden 拟牛顿法作对比,对比显示:在稳态计算中,自校正 Broyden 拟牛顿法计算速度与 Broyden 拟牛顿法相似而远大于牛顿法,同时其面对恶劣初始计算条件时表现出了更强的适应性,体现出比牛顿法和 Broyden 拟牛顿法更优越的计算收敛能力;在动态计算中,自校正 Broyden 拟牛顿法动态精度最高,其动态误差是 Broyden 拟牛顿法的 15%,是牛顿法的 28%,动态计算最大残差量是其他两种算法的 25%,而部件计算次数仅为牛顿法的 15%左右. 综合仿真结果证明:自校正 Broyden 拟牛顿法对初始计算条件的要求更低、收敛能力更高且计算收敛速度更快,达到了算法提出的目的.

参考文献:

[1] John R. Real-time simulation of F100-PW-100 turbofan engine using the hybrid computer[R]. NASA TMX-3261,1975.

[2] 廉筱纯,吴虎. 航空发动机原理[M]. 西安:西北工业大学出版社,2005.

[3] 骆广琦,桑增产,王如根,等. 航空燃气涡轮发动机数值仿真[M]. 北京:国防工业出版社,2007.

[4] 李家瑞,孙健国,张绍基. 航空发动机总体性能数学模型的 1 种收敛算法[J]. 航空发动机,2005,31(4):48-50. LI Jiarui,SUN Jianguo,ZHANG Shaoji. A convergence algorithm of aeroengine performance mathematical model [J]. Aeroengine,2005,31(4):48-50. (in Chinese)

[5] Biazar J,Ghanbary B. A new technique for solving systems of nonlinear equations[J]. Applied Mathematical Sciences, 2008,2(55):2699-2703.

[6] Noor M A,Waseem M. Some iterative methods for solving a system of nonlinear equations[J]. Computers and Mathematics with Applications,2009,57(1):101-106.

[7] Dhamacharoen A. An efficient hybrid method for solving systems of nonlinear equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2014,263:59-68.

[8] 苏三买,陈永琴. 基于混合遗传算法的航空发动机数学模型解法[J]. 推进技术,2007,28(6):661-664. SU Sanmai,CHEN Yongqin. Hybrid genetic algorithm in solving aeroengine nonlinear mathematical model[J]. Journal of Propulsion Technology,2007,28(6):661-664. (in Chinese)

[9] 王军,隋岩峰. 求解航空发动机数学模型的迭代算法及其改进算法的收敛性研究[J]. 系统仿真学报,2014,26(2):310-314. WANG Jun,SUI Yanfeng. Study on convergence and improvement of iteration methods in aero-engine mathematical models[J]. Journal of System Simulation,2014,26(2):

310-314. (in Chinese)

[10] 陈玉春,徐思远,杨云铠. 改善航空发动机特性计算收敛性的方法[J]. 航空动力学报,2008,23(12):2242-2248.
CHEN Yuchun,XU Siyuan,YANG Yunkai. Research on the method to solve convergence problem in aero turbo engine performance computation[J]. Journal of Aerospace Power,2008,23(12):2242-2248. (in Chinese)

[11] 杨伟,冯雷星,彭靖波,等. 求解航空发动机数学模型的混合智能方法[J]. 推进技术,2008,29(5):614-616.
YANG Wei,FENG Leixing,PENG Jingbo,et al. An intelligent algorithm for solution of nonlinear mathematical model for aeroengine[J]. Journal of Propulsion Technology,2008,29(5):614-616. (in Chinese)

[12] 陆军,郭迎清,张书刚. 航空发动机非线性模型实时计算的迭代方法研究[J]. 航空动力学报,2010,25(3):681-686.
LU Jun, GUO Yingqing, ZHANG Shugang. Research on the iteration methods in aero-engine non-linear model real time computation[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(3):681-686. (in Chinese)

[13] 倪健,马昌凤. 解非线性方程牛顿迭代法的一种新的加速技巧[J]. 广西科学院学报,2010,26(1):1-3.
NI Jian, MA Changfeng. A new acceleration technique of Newton iterative method for solving nonlinear equation [J]. Journal of Guangxi Academy of Sciences, 2010, 26 (1):1-3. (in Chinese)

[14] 黄旭,王占学,张晓博. 基于 Broyden 改进算法的航空发动机性能模拟研究[J]. 科学技术与工程, 2012, 12(21): 5231-5234.
HUANG Xu,WANG Zhanxue,ZHANG Xiaobo. Research of a corrected Broyden's method on the aero-engine performance simulation[J]. Science Technology and Engineering,2012,12(21):5231-5234. (in Chinese)

[15] 叶伟,陈玉春,崔高峰,等. 拟牛顿法在航空发动机特性仿真中的应用[J]. 计算机仿真,2007,10(10):78-82.
YE Wei,CHEN Yuchun,CUI Gaofeng,et al. Application of quasi-Newton method to aero-engine performance simulation[J]. Computer Simulation,2007,10(10):78-82. (in Chinese)

[16] 苟学中,周文祥,黄金泉. 变循环发动机部件级建模技术[J]. 航空动力学报,2013,28(1):104-111.
GOU Xuezhong, ZHOU Wenxiang, HUANG Jinquan. Component-level modeling technology for variable cycle engine[J]. Journal of Aerospace Power,2013,28(1):104-111. (in Chinese)

[17] 王元,李秋红,黄向华. 变循环发动机建模技术研究[J]. 航空动力学报,2013,28(4):954-960.
WANG Yuan,LI QiuHong,HUANG Xianghua. Research of variable cycle engine modeling techniques[J]. Journal of Aerospace Power,2013,28(4):954-960. (in Chinese)

[18] 蒲志林. 非线性代数系统的一种拟牛顿迭代法[J]. 四川师范大学学报,1995,18(2):35-41.
PU Zhilin. A nonlinear algebraic systems quasi-Newton iterative method[J]. Journal of Sichuan Normal University, 1995,18(2):35-41. (in Chinese)

(编辑:秦理曼、王碧琨)